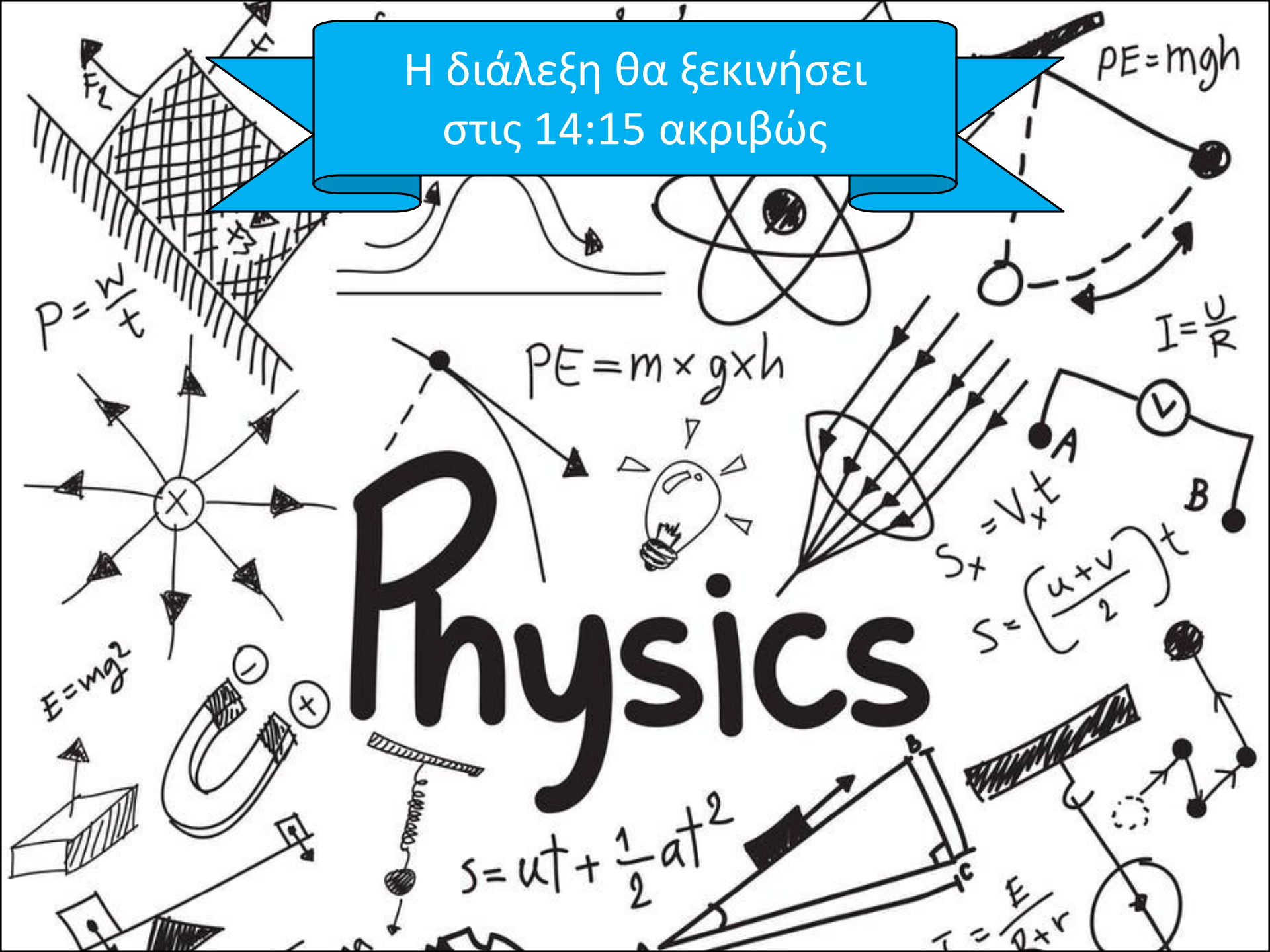


Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 14:15 ακριβώς

Physics





Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρείς) διαστάσεις.

Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Εικόνα: Στην εκτέλεση πέναλτι, ο ποδοσφαιριστής κτυπά ακίνητη μπάλα, με σκοπό να της δώσει ταχύτητα και κατεύθυνση ώστε να σκοράρει. Υπό προϋποθέσεις, η εκτέλεση μπορεί να ιδωθεί ως κίνηση σε δυο (αντί τρεις) διαστάσεις.

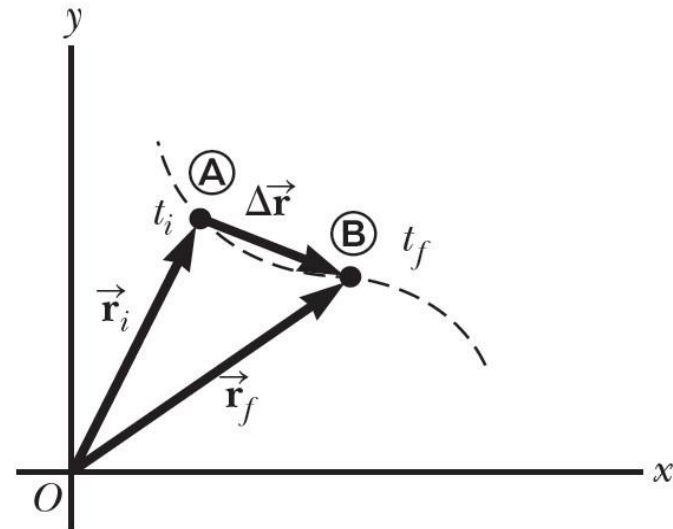
Φυσική για Μηχανικούς

Μηχανική

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Διάνυσμα θέσης $\vec{r}$
- Μετατόπιση $\Delta\vec{r}$
 - Διαφορά μεταξύ τελικής κι αρχικής θέσης
 - $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$
- Μέση Ταχύτητα
 - $\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- Στιγμαία ταχύτητα
 - $\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$



- Μέση Επιτάχυνση
 - $\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i}$
- Στιγμαία Επιτάχυνση
 - $\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t)$

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις (review...)

- Εξισώσεις κίνησης σε δυο διαστάσεις με σταθερή επιτάχυνση

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$

$$u_{x_f} = u_{x_i} + a_x t$$

$$u_{y_f} = u_{y_i} + a_y t$$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$

$$x_f = x_i + u_{x_i} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

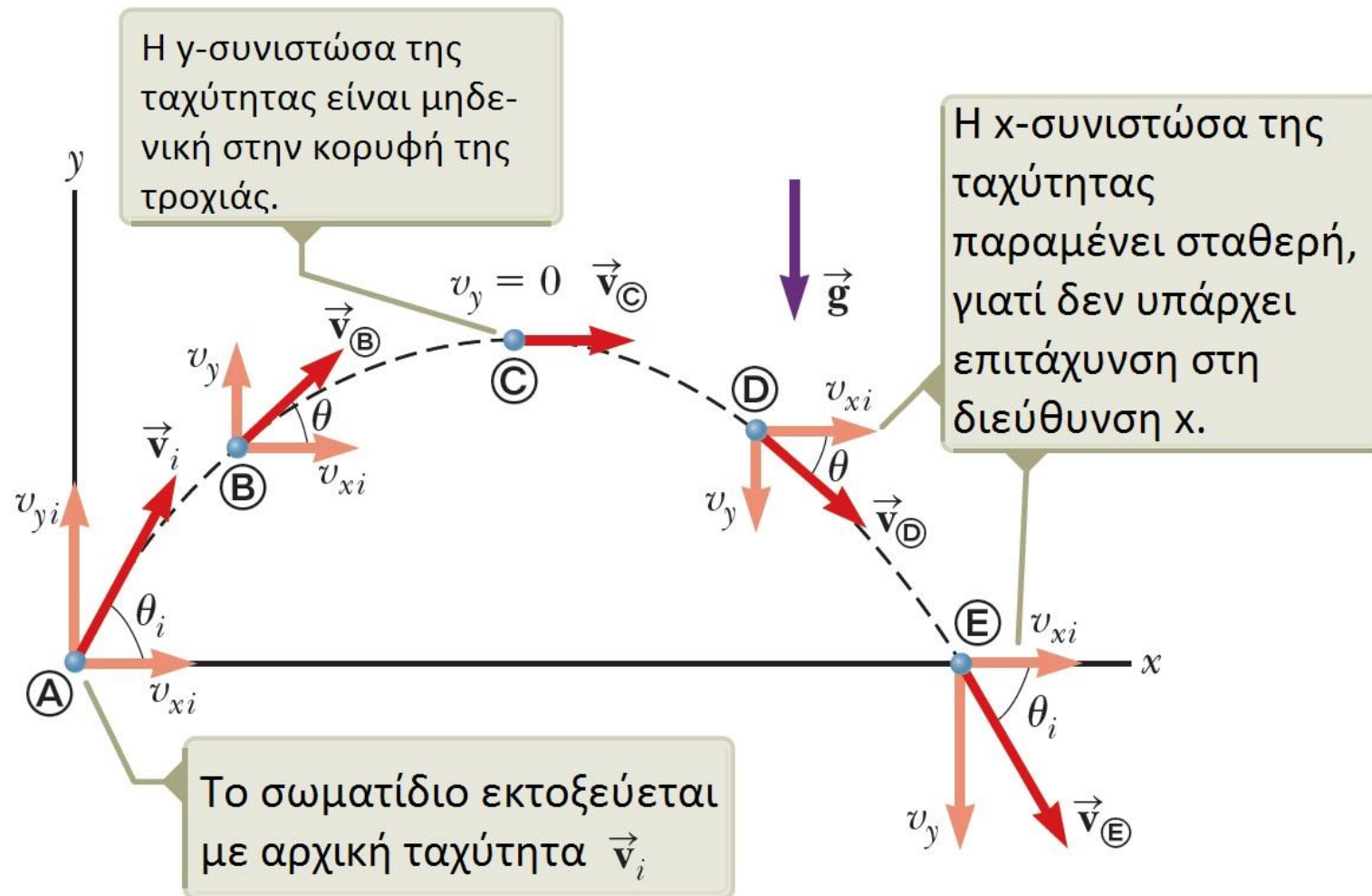
$$y_f = y_i + u_{y_i} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Ισχύουν και όλες οι υπόλοιπες εξισώσεις που περιγράφουν την μονοδιάστατη κίνηση υπό σταθερή (ή μηδενική) επιτάχυνση!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Μια κλασική κίνηση σε δυο διαστάσεις είναι η **βολή**.
- Το μόνο που αλλάζει είναι
 - A. Η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g}$, που θεωρείται σταθερή και κάθετη (με φορά προς τα κάτω) στον άξονα x .
 - B. Επίσης, η **αντίσταση του αέρα** θεωρείται αμελητέα.
- Υπό αυτές τις συνθήκες, η ανάλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απλή...

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας γράψουμε τις δυο διανυσματικές εξισώσεις **βολής**

- $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{g}t$

- $\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$

- Ίδιες με αυτές της Διαφ. 5 (3 slides πριν)!
- Προσοχή! Είναι διανυσματικές εξισώσεις!

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας αναλύσουμε την κίνηση

- Αρχική θέση

$$u_{xi} = u_i \cos(\theta_i)$$

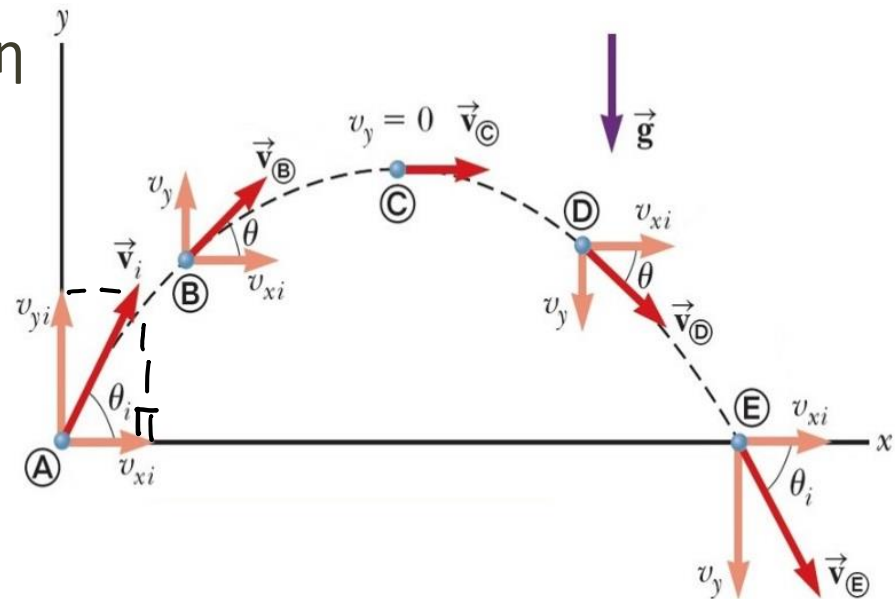
$$u_{yi} = u_i \sin(\theta_i)$$

- Δυο συνιστώσες:

- A) Μηδενική επιτάχυνση στον x-άξονα (u σταθερή)

- B) Σταθερή επιτάχυνση στον y-άξονα
(g – βαρυτική επιτάχυνση)

- Γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης όπως τις ξέρουμε



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Αλγεβρικές εξισώσεις

- 1) $x_f = x_i + u_{xi}t$

- 2) $u_{yf} = u_{yi} - gt$

$$u_{y,avg} = \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})$$

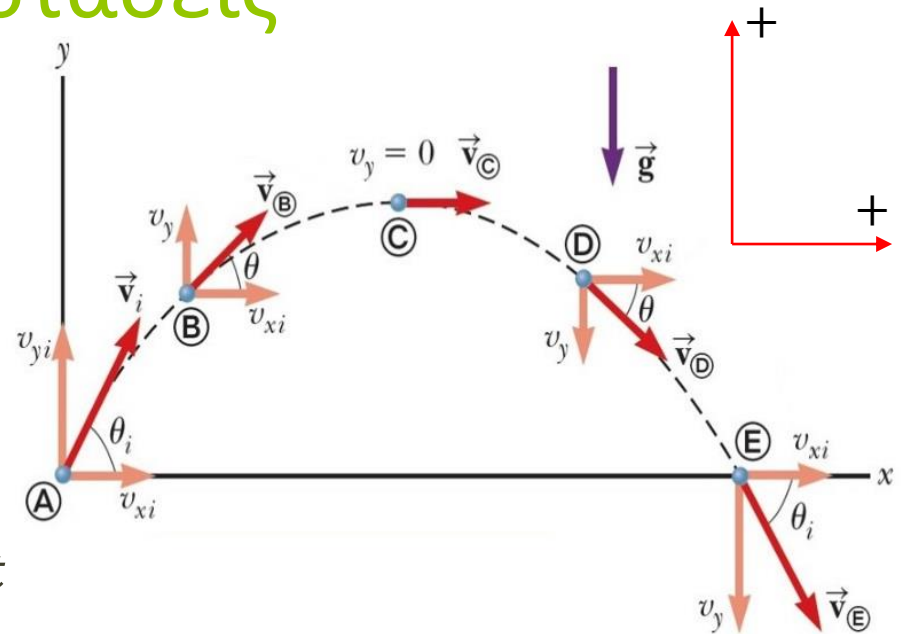
$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(u_{yi} + u_{yf})t$$

$$y_f = y_i + u_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$u_{yf}^2 = u_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i)$$

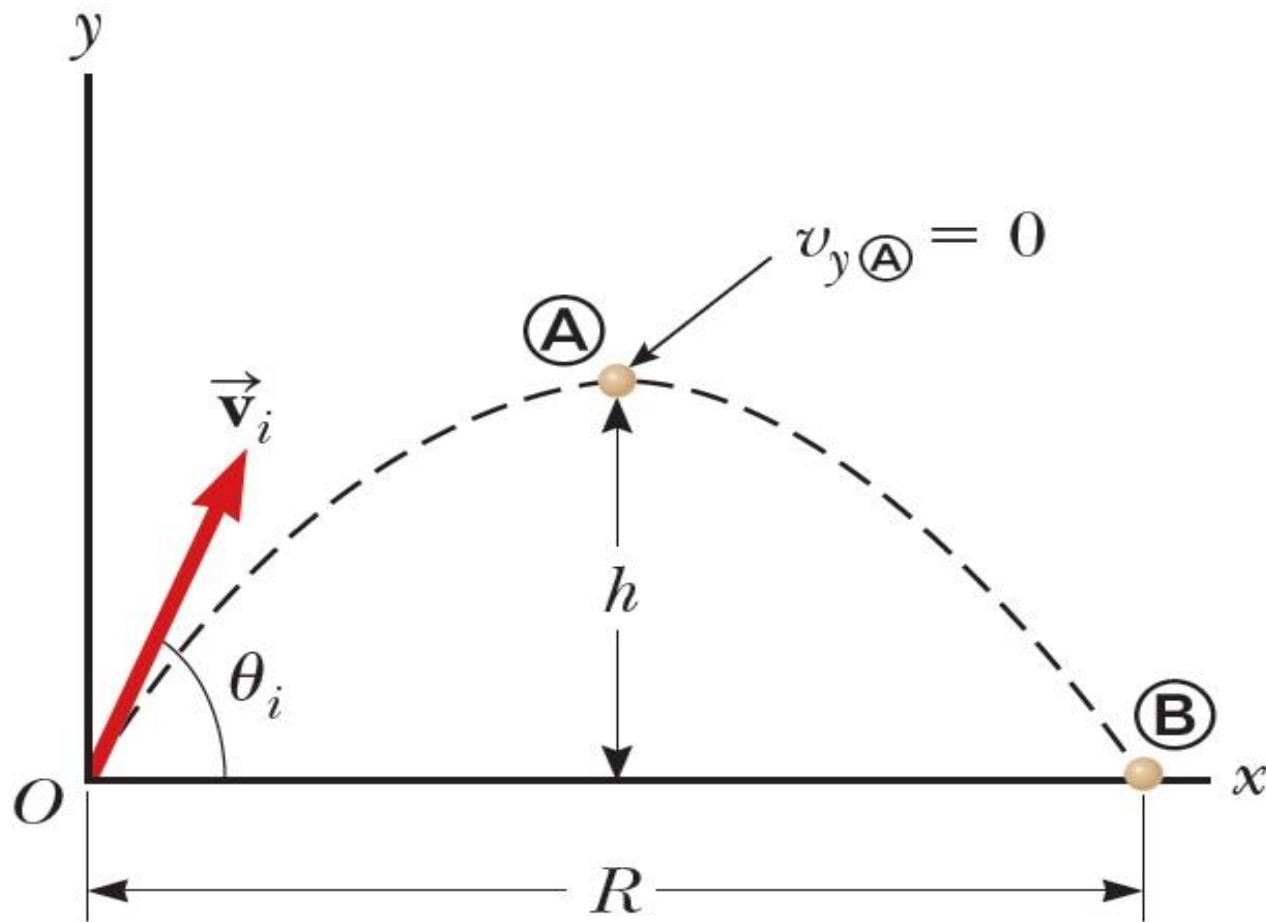
με $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

- Εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις!



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Εύρος R και Μέγιστο Ύψος h βολής



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h , R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή $O \rightarrow A$: $y_f = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2 = h$

$$h = y_i + u_{y_i}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= 0 + u_i \sin(\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Επίσης,

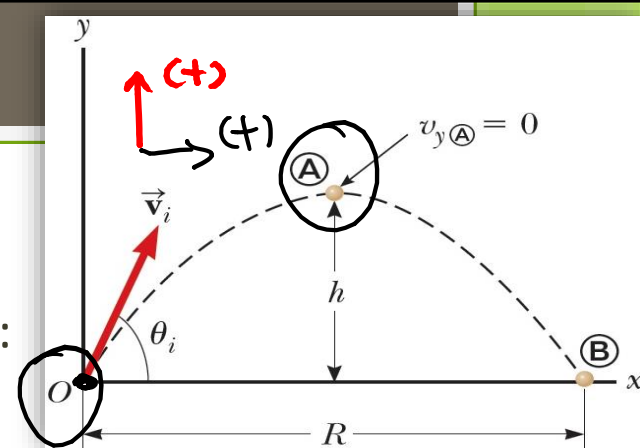
$$0 = u_{y_f} = u_{y_i} - gt \Leftrightarrow t = \frac{u_{y_i}}{g}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις

$$h = u_i \sin(\theta_i) \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{u_{y_i}}{g} \right)^2$$

κι αφού $u_{y_i} = u_i \sin(\theta_i)$ έχουμε

$$h = \frac{u_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ας βρούμε τα h , R συναρτήσει των δεδομένων:

Διαδρομή $O \rightarrow B$:

Στον x-άξονα: $x_f = x_i + u_x t \Rightarrow R = \cancel{x_i} + u_x t = u_x t = u_i \cos \theta_i t$

$$R = x_B = x_O + u_x t$$

Στον y-άξονα: $y_B = y_O$
 $y_f = y_i + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \underline{0} = \underline{0} + u_{y_i} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} g t^2 = u_{y_i} t \Rightarrow \frac{1}{2} g t = u_{y_i} = u_i \sin \theta_i \Rightarrow t = \frac{2u_i \sin \theta_i}{g}$

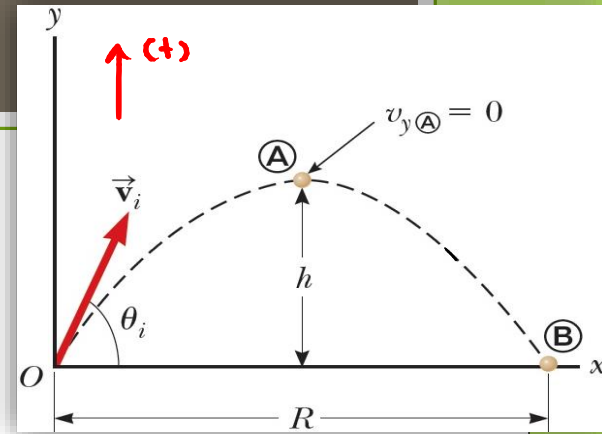
Από τις παραπάνω σχέσεις,

$$R = u_i \cos(\theta_i) \frac{2u_i \sin \theta_i}{g} = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

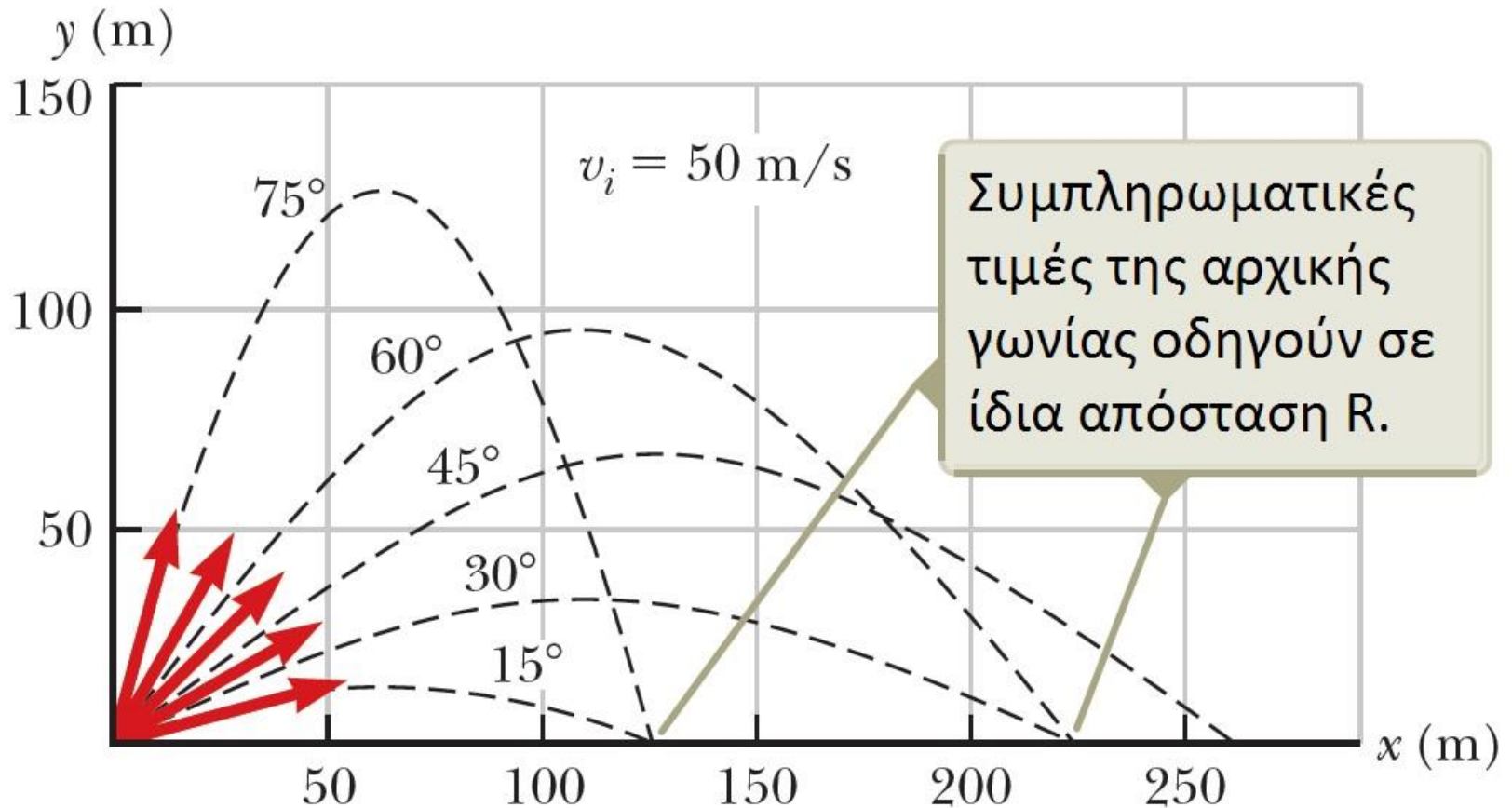
Έτσι

$$R = \frac{u_i^2 \sin(2\theta_i)}{g}$$

$$\begin{aligned} \eta_f(2\alpha) &= 2\eta_f\alpha \cdot \epsilon\eta\alpha \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Ο Γιάννης Αντετοκούνμπο σουτάρει την μπάλα υπό γωνία 40° με το οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση 10 m από το καλάθι (buzzer beater). Το ύψος του είναι 2.0 m ενώ το ύψος της μπασκέτας είναι 3.0 m.

A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;



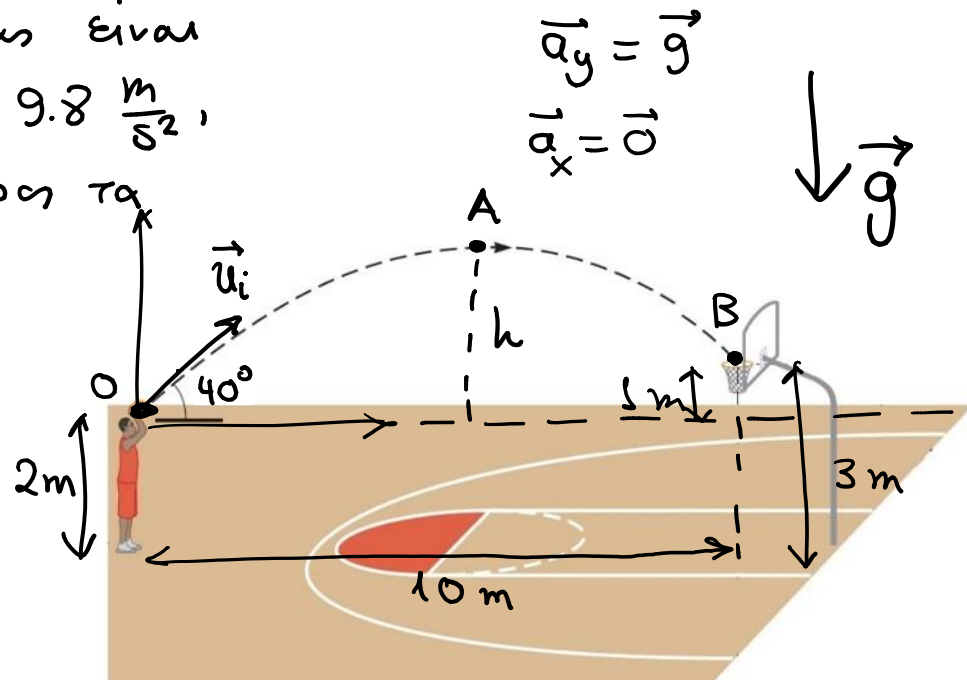
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

A) Ποια είναι η επιτάχυνση της μπάλας στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της;

Η επιτάχυνση της μπάλας είναι σταθερή και ίση με $9.8 \frac{m}{s^2}$, με φορά κατακόρυφα προς τα κάτω και είναι πάντα σταθερή!



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπασκέτας 3m.

Β) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

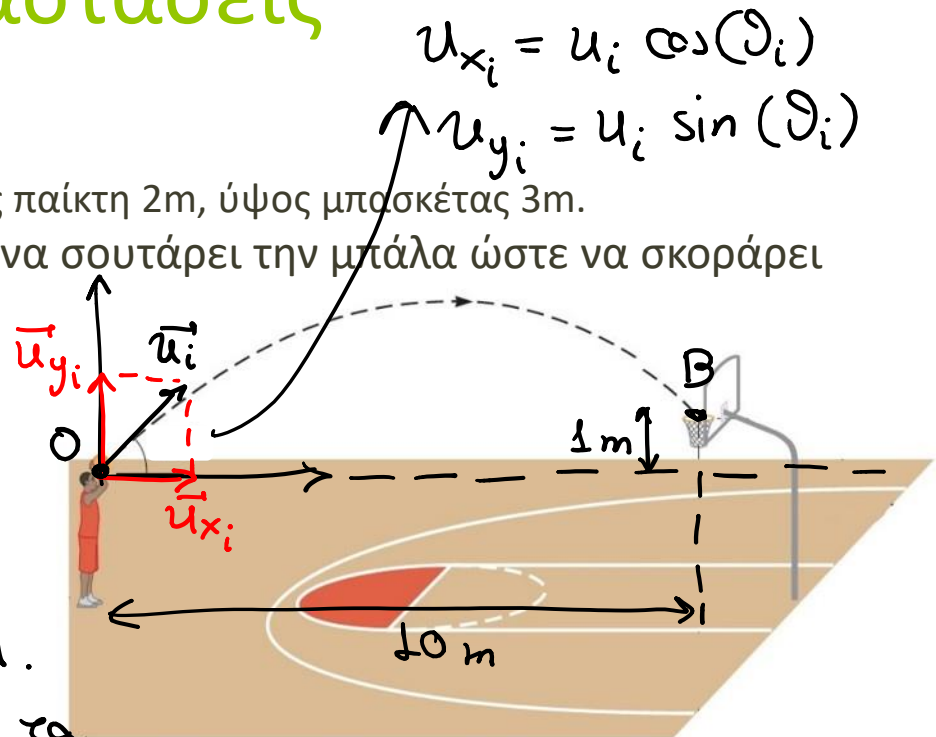
$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$

Θεωράμε σημείο αναφοράς τα χέρια του παίκτη, δηλ. όταν η μπάλα φεύγει από τα χέρια του.

Στον x-άξονα: (κίνηση με σταθ. ταχύτητα) $x_B = x_0 + u_x t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 10 = 0 + u_x t \Leftrightarrow 10 = u_i \cos(\vartheta_i) \cdot t \Rightarrow t = \frac{10}{u_i \cos(\vartheta_i)}$$

Στον y-άξονα: (κίνηση με σταθ. επιτάχυνση): ①



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

● Παράδειγμα – Λύση:

- γωνία 40° , απόσταση 10m, ύψος παίκτη 2m, ύψος μπάσκετας 3m.

B) Με ποια ταχύτητα πρέπει να σουτάρει την μπάλα ώστε να σκοράρει χωρίς ταμπλό;

Δίνονται:

$$\tan(40^\circ) = 0.84,$$

$$\cos(40^\circ) = 0.76,$$

$$\cos^2(40^\circ) = 0.58$$

Εκεί:

$$y_B = y_A + u_{y_A} t - \frac{1}{2} g t^2$$

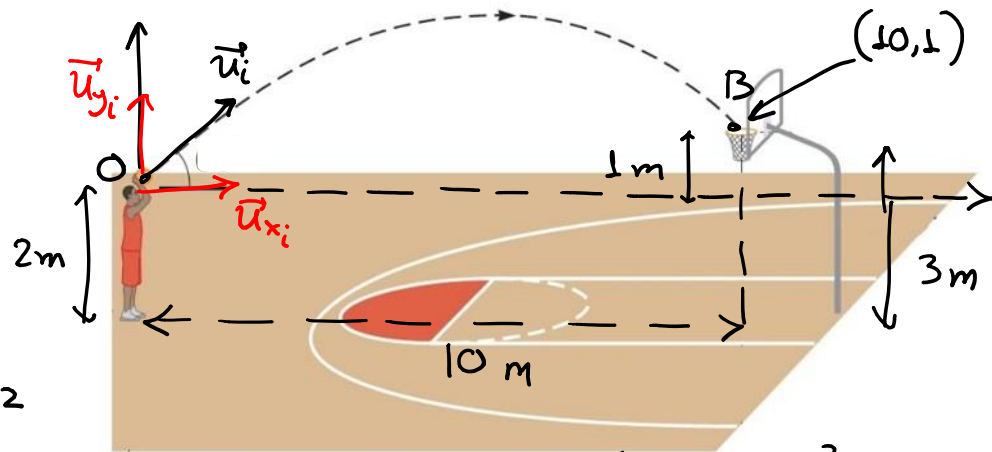
$$1 = 0 + u_i \sin \theta_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ανέ τη σχέση (1), έχουμε: $1 = \cancel{u_i} \sin(40^\circ) \cdot \frac{10}{\cancel{u_i} \cos(40^\circ)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{10}{u_i \cos(40^\circ)} \right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 = 10 \tan(40^\circ) - 4.9 \frac{100}{u_i^2 \cos^2(40^\circ)} \Leftrightarrow \frac{490}{u_i^2 \cos^2(40^\circ)} = 10 \tan(40^\circ) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_i^2 \cos^2(40^\circ) = \frac{490}{10 \tan(40^\circ) - 1} \Leftrightarrow u_i^2 = \frac{490}{10 \tan(40^\circ) \cos^2(40^\circ) - \cos^2(40^\circ)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_i \simeq 10.7 \frac{m}{s}$$



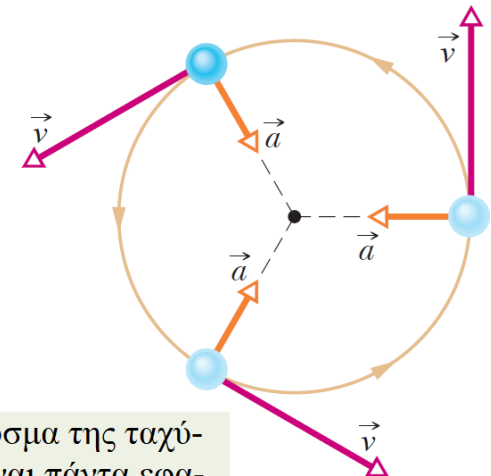
Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Σωματίδιο κινείται σε κύκλο ή σε κυκλικό τόξο
- Σταθερή αριθμητική ταχύτητα σε απόσταση r
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα ταχύτητας
 - Ως εκ τούτου, το σώμα επιταχύνεται!

- Σταθερή επιτάχυνση κατά μέτρο
 - ...προφανώς όχι σταθερό διάνυσμα επιτάχυνσης
 - Όμως κατευθύνεται πάντα ακτινικά προς τα «μέσα»!
 - Κεντρομόλος επιτάχυνση

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

Ταχύτητα

- Διάνυσμα εφαπτόμενο σε σημεία του κύκλου
- Φορά προς την κατεύθυνση της κίνησης

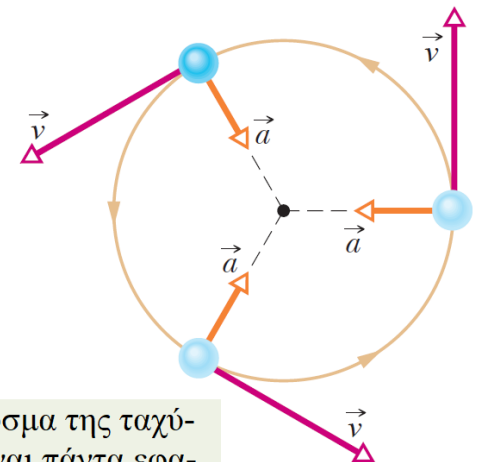
Επιτάχυνση

- Διάνυσμα με κατεύθυνση ακτινικά προς τα «μέσα»
- Κεντρομόλος επιτάχυνση

$$a = \frac{u^2}{r}$$

με u το μέτρο της ταχύτητας
με r την ακτίνα του κύκλου

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

- Ομαλή κυκλική κίνηση

- Το σωματίδιο διατρέχει την περιφέρεια του κύκλου μια φορά σε χρόνο

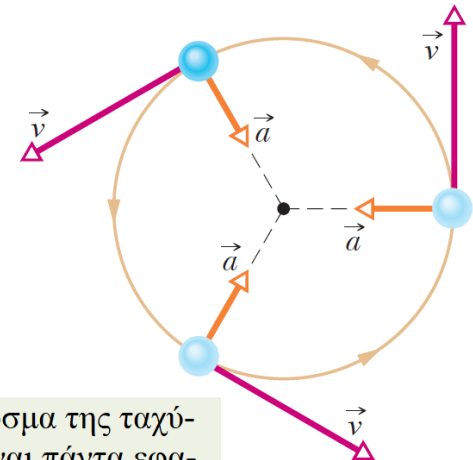
$$T = \frac{2\pi r}{u}$$

- Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **περίοδος**

- Από την ίδια σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ως

$$u = \frac{2\pi r}{T}$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

Ομαλή κυκλική κίνηση

- Εκτός της (γραμμικής) ταχύτητας, υπάρχει κι ένα ακόμα μέγεθος που μας πληροφορεί για το ρυθμό με τον οποίο η ακτίνα της κυκλικής κίνησης διαγράφει γωνίες
- Ο λόγος

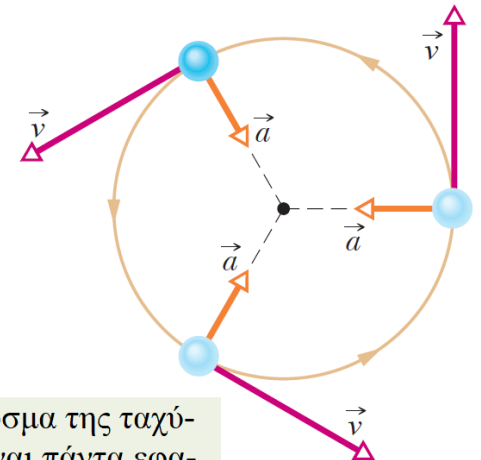
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ονομάζεται **γωνιακή ταχύτητα ω**

- Ισούνται με το ρυθμό μεταβολής του τόξου που διαγράφεται κατά την κίνηση
- Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι

$$u = r\omega \quad \text{και} \quad a = r\omega^2$$

Το διάνυσμα της επιτάχυνσης δείχνει πάντα προς το κέντρο του κύκλου.



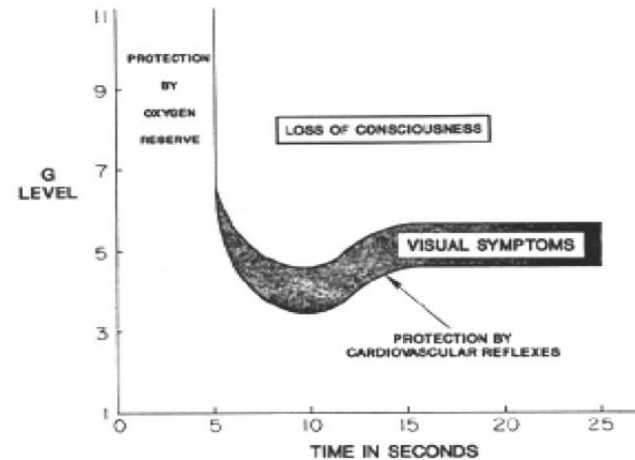
Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι πάντα εφαπτόμενο στην κίνηση.

Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα:

- ◉ Οι πιλότοι μαχητικών αεροσκαφών προβληματίζονται όταν έχουν να πάρουν πολύ κλειστές στροφές λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης. Καθώς η επιτάχυνση αυξάνεται, μπορεί να συμβεί μια συνθήκη γνωστή ως g-LOC.

Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j}$ m/s για χρόνο $t = 24$ s και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j}$ m/s ?



Κίνηση σε Δυο Διαστάσεις

◉ Παράδειγμα – Λύση :

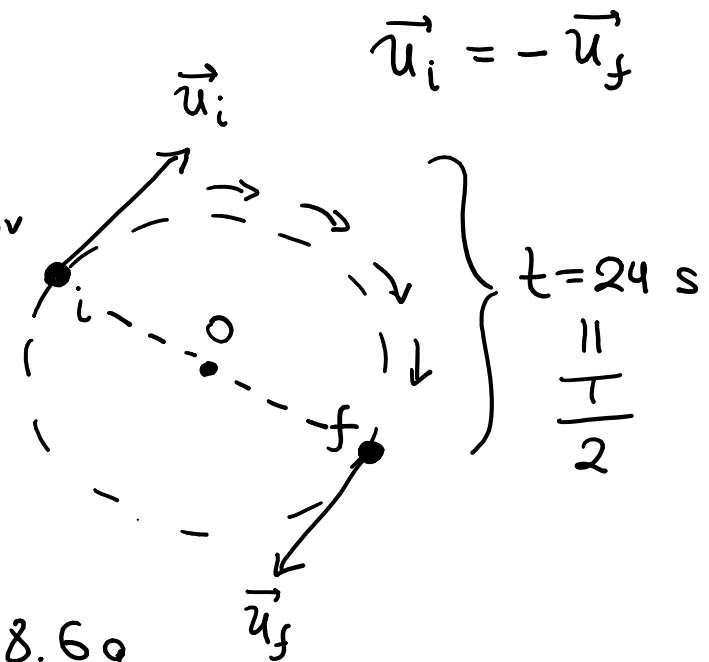
- ◉ Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης (σε μονάδες g) ενός αεροσκάφους που μπαίνει σε οριζόντια κυκλική στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_i = 400\vec{i} + 500\vec{j} \text{ m/s}$ για χρόνο $t = 24 \text{ s}$ και βγαίνει από τη στροφή με ταχύτητα $\vec{v}_f = -400\vec{i} - 500\vec{j} \text{ m/s}$?

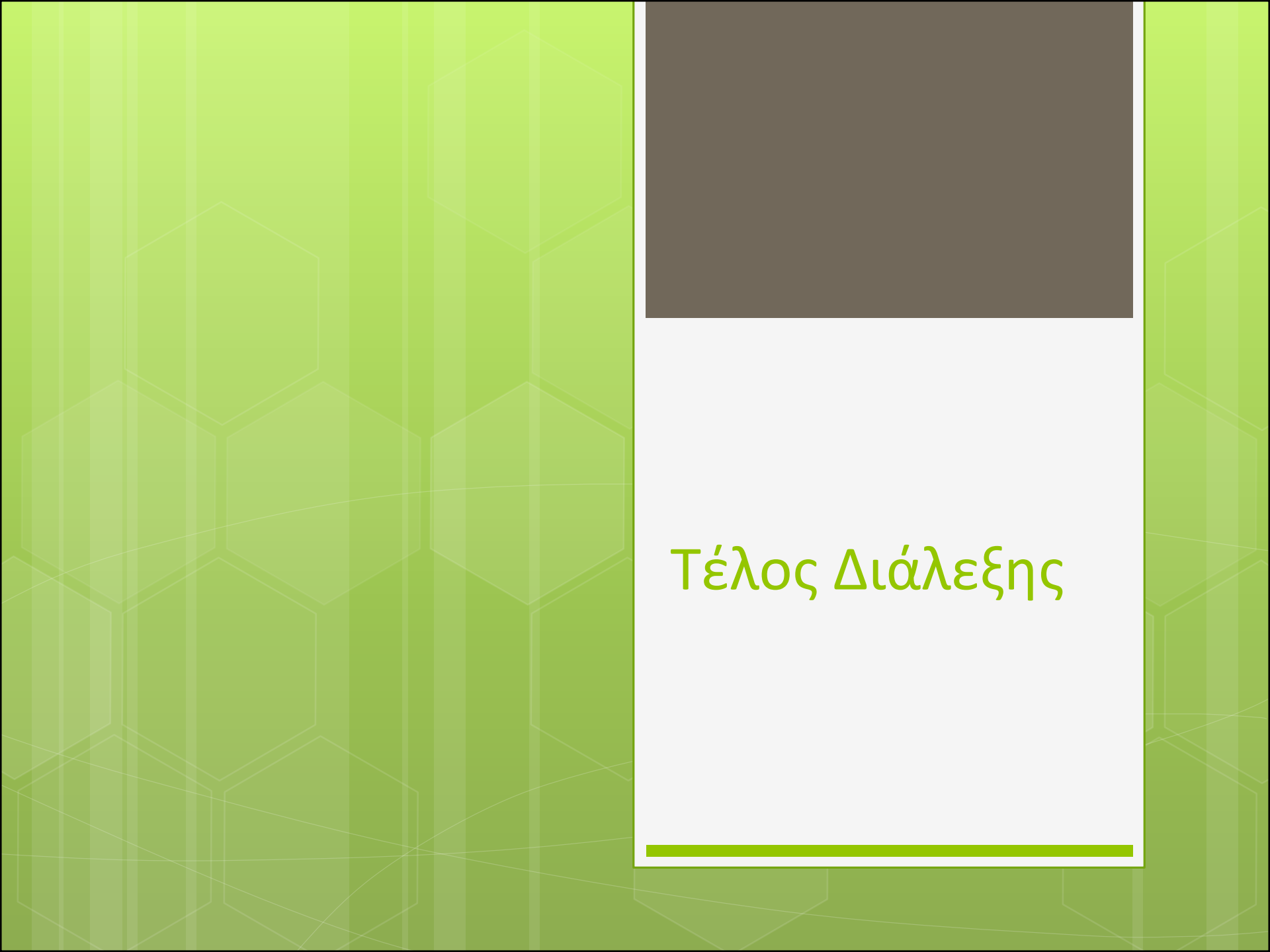
Βρίσκουμε ότι $\frac{T}{2} = 24 \text{ s} \Rightarrow T = 48 \text{ s}$

Είναι $a = \frac{2\pi u}{T}$, χρειαζόμαστε την ταχύτητα u , οπότε:

$$u = |\vec{v}| = \sqrt{400^2 + 500^2} \approx 640.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } a = \frac{2\pi u}{T} = 83.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a \approx 8.6g$$





Τέλος Διάλεξης